

Εφυσικότητα

Είχαμε δει ότι υπάρχει μια ισοδυναμία μεταξύ των :

- $\mu | \epsilon_r | 1 | \infty$ και $\mu^{\epsilon_r} | \mu | 1 | \infty$
- $\epsilon_r | \mu | 1 | \infty$ και $\mu | \mu^{\epsilon_r} | 1 | \infty$

Σύστημα $\mu^{\epsilon_r} | \mu | 1 | \infty$

Έρχονται σε ομάδες των x ατόμων και εφυσικότητα 1-1 και ο αριθμός αυτός ακολουθεί κάποια κατανομή

$$P(x=i) = g_i, \quad \sum g_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots$$

$f(t)$: ο αριθμός των πελατών στο σύστημα την χρονική στιγμή t

$$P_i(t) = P(f(t) = i | f(0) = 0)$$

$$P_r = \lim_{t \rightarrow \infty} P_r(t)$$

Σωδών καταστάσεις :

$$P_0(t+dt) = (1 - \lambda dt + o(dt)) P_0(t) + (\mu dt + o(dt)) P_1(t)$$

...

$$P_r(t+dt) = (1 - (\lambda - \mu) dt + o(dt)) P_r(t) + (\mu dt + o(dt)) P_{r+1}(t) + P_0(t) | g_r \lambda dt + o(dt) + P_1(t) | g_{r-1} \lambda dt + o(dt) + \dots + P_{r-1}(t) | g_1 \lambda dt + o(dt)$$

αριθμ με
ε πελάτες

$$1 = P(1) = \frac{-\mu P_0}{-\mu - \lambda(1 - G(1)) + \lambda \left. \frac{dG(x)}{dx} \right|_{x=1}}$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} G(1)$$

$$E(\text{χρόνος εξυπηρέτησης}) = \frac{1}{\mu}$$

$$E(\text{χρόνος διαδικαστικών κυρίως}) = \frac{1}{\lambda G(1)}$$

$$\text{Επομένως } P(x) = \frac{\mu(1-\rho)(1-x)}{\mu(1-x) - \lambda x(1-G(x))}$$

$$\text{Εάν ορίσουμε } g_i = \begin{cases} 1 & , i=r \\ 0 & , i \neq r \end{cases}$$

$$G(x) = x^r$$

$$P(x) = \frac{\mu(1-x)(1-\rho)}{\mu(1-x) - \lambda x(1-x^r)}$$

$$G'(1) = r x^{r-1} \Big|_{x=1} = r$$

$$\text{Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε το σύστημα } \mu \begin{matrix} \text{Σ} \\ \text{r} \end{matrix} \Big| \mu \Big| 1 \Big| \infty$$

$$\text{και } \rho = \frac{\lambda r}{\mu}$$

$$\text{Έστω ότι } g_x(x) = r(1-r)^{x-1}, \quad x=1, 2, \dots$$

$$\text{Από αυτό κάνει τα προηγούμενα ότι έστω } \rho = \frac{\lambda G(1)}{\mu}$$

$$\text{Για να μην ενοχάσω το } 1-r=w$$

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-w) w^{k-1} x^k = x \sum_{k=1}^{\infty} (1-w) (wx)^{k-1} = \frac{x(1-w)}{1-wx}$$

γεωμετρική σειρά

Θέλω να βρω το ρ

$$\rho = \frac{AG(1)}{\mu} = \frac{A}{\mu} \frac{(1-\omega)(1-\omega x) + x(1-\omega)\omega}{(1-\omega x)^2} \Big|_{x=1} = \frac{A}{\mu(1-\omega)}$$

Κάνω ανακατάσταση και θα έχω :

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{\mu(1-x)(1-\rho)}{\mu(1-x) - \lambda x \left(1 - \frac{x(1-\omega)}{1-\omega x} \right)} = \frac{(1-\rho)(1-\omega x)}{1 - \frac{A+\mu\omega}{\mu} x} = \\ &= \frac{1-\rho}{1 - \frac{A+\mu\omega}{\mu} x} - \frac{\omega(1-\rho)x}{1 - \frac{A+\mu\omega}{\mu} x} = \\ &= (1-\rho) \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{A+\mu\omega}{\mu} \right)^r x^r - \omega(1-\rho) \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{A+\mu\omega}{\mu} \right)^r x^{r+1} \end{aligned}$$

Άρα : $\rho_0 = 1-\rho$

$$\begin{aligned} \rho_n &= (1-\rho) \left(\frac{A+\mu\omega}{\mu} \right)^{n-1} \left(\frac{A+\mu\omega}{\mu} - \omega \right) = \\ &= (1-\rho) \left(\frac{A}{\mu} + \omega \right)^{n-1} \frac{A}{\mu}, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Εάν οι πελάτες που έρχονται είναι 1 ή 2 με πιθανότητα a και $1-a$ αντίστοιχα. Να βρω την πιθανότητα να έχω n πελάτες στο σύστημα

$$g_i = \begin{cases} a, & i=1 \\ 1-a, & i=2 \\ 0, & i \neq 1, 2 \end{cases}$$

Άρα χρειαζόμαστε να βρούμε το $G(x)$

$$G(x) = ax + (1-a)x^2$$

$$G'(x) = a + 2(1-a)x = 2-a$$

και με αντικαταστάσεις θα προκύψει ότι :

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{\mu(1-x)(1-A\mu(2-a))}{\mu(1-x) - Ax(1-(ax+(1-a)x^2))} = \\ &= \frac{\mu(1-x)(1-(\frac{2-a}{\mu})A)}{A(1-a)x^3 + Aax^2 - (A+\mu)x + \mu} \end{aligned}$$

Εάν δοθούν $a=0,5$ και $A = \frac{8\mu}{21}$

και μετά αντικαταστάσεις θα έχουμε

~~$$P(x) = \frac{9}{(21-8x-\mu x^2)} = \frac{9}{(7+2x)(3-2x)}$$~~

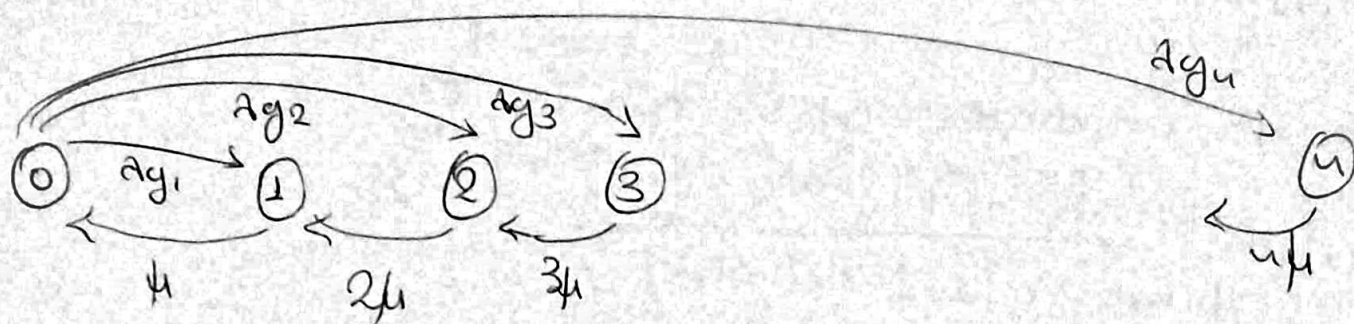
$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{9}{(21-8x-\mu x^2)} = \frac{9}{(7+2x)(3-2x)} \\ P(x) &= \frac{a_1}{7+2x} + \frac{a_2}{3-2x} = \frac{9/10}{7+2x} + \frac{9/30}{3-2x} = \\ &= \frac{9/10}{1 - (x/7/2)} + \frac{9/30}{1 - \frac{x}{3/2}} \end{aligned}$$

$$P(x) = \frac{9}{70} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{7/2} \right)^n + \frac{9}{30} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3/2} \right)^n$$

$$P_n(x) = \frac{9}{70} \left(-\frac{2}{7} \right)^n + \frac{9}{30} \left(\frac{2}{3} \right)^n \left(\text{Άρα } P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n \right)$$

Συστήμα $M^{[x]}$ | M | ∞ | ∞

Ανταρροί υποκείμενοι που εξυπηρετούν



$$\lambda P_0 = P_1 \mu$$

$$\lambda P_1 + \mu P_2 = 2\mu P_2 + \lambda P_0 g_1$$

$$\lambda P_n + n\mu P_n = (n+1)\mu P_{n+1} + \lambda P_0 g_n + \lambda P_1 g_{n-1} + \dots + \lambda P_{n-1} g_1 \Rightarrow$$

$$\left(P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n \quad G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n z^n \right)$$

$$\Rightarrow \lambda P(z) + \mu z P'(z) = \mu P'(z) - 1 \cdot \lambda G(z) P(z) \Rightarrow$$

$$\mu(1-z) P'(z) = \lambda(1-G(z)) P(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(z) = c e^{\int_0^z \frac{\lambda}{\mu} \frac{1-G(x)}{1-x} dx}, \quad P(1) = 1$$

$$c = e^{-\frac{\lambda}{\mu} \int_0^1 \frac{1-G(x)}{1-x} dx}$$

$$P(z) = e^{-\frac{\lambda}{\mu} \int_z^1 \frac{1-G(x)}{1-x} dx}$$

$$P_n \quad g_i = \begin{cases} 1, & i=2 \\ 0, & i \neq 2 \end{cases}$$

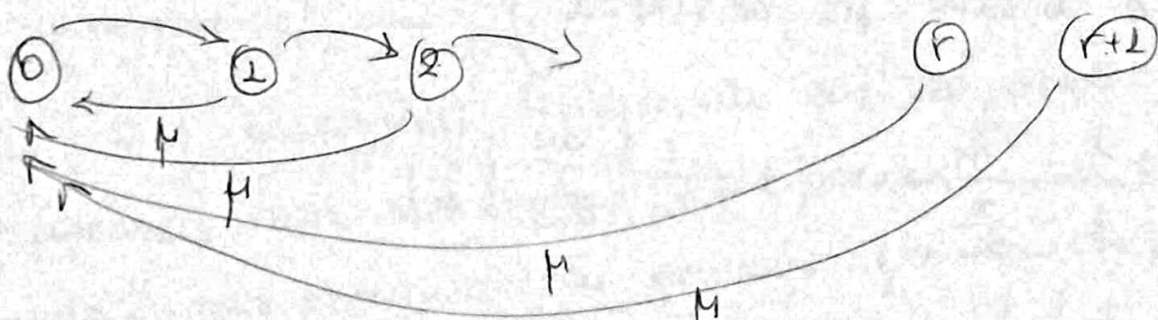
$$P(z) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \int_0^1 \frac{1-x}{1-x} dx = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} (1-2) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} e^{\frac{\lambda}{\mu} 2} =$$

$$= e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \sum_{u=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda 2}{\mu} \right)^u \frac{1}{u!}$$

$$P_u = \frac{e^{-\lambda/\mu} (\lambda/\mu)^u}{u!} \quad \text{όπου είναι } \omega \mu/\mu/\infty/\infty \quad \mu \in P\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

Σύστημα $\mu/\mu^{[r]}/\infty/\infty$

Αντί να εξυπηρετεί r -πελάτες, αν είναι ελεύθερος αρχίζει να εξυπηρετεί ακόμα και λιγότερους από r πελάτες



$$x^0 \quad \lambda P_0 = \mu (P_1 + \dots + P_r)$$

$$x^1 \quad \lambda P_1 + \mu P_1 = \mu P_{r+1} + \lambda P_0$$

$$x^k \quad \lambda P_k + \mu P_k = \mu P_{k+r} + \lambda P_{k-1}$$

$$\left(P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n \right)_{|x| < 1}$$

$$\Rightarrow \lambda P(x) + \mu (P(x) - P_0) = \mu \sum_{i=1}^r P_i + \frac{\mu}{x^r} \left(P(x) - \sum_{i=1}^r P_i x^i \right) + \lambda x P(x)$$

$$P(x) = \frac{\mu \sum_{i=0}^{r-1} P_i (x^i - x^r)}{\lambda x^{r+1} - (\lambda + \mu) x^r + \mu} = \frac{\sum_{i=0}^{r-1} P_i (x^i - x^r)}{\frac{\lambda}{\mu} x^{r+1} - \left(\frac{\lambda}{\mu} + 1 \right) x^r + 1} =$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} P_i (x_i - x^r)}{rp x^{r+1} - (1-rp) x^{r+1}} = \quad , \quad \rho = \frac{\lambda}{n\mu}$$

$$= \frac{rp x^{r+1} - (1+rp) x^{r+1}}{(1-x) \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)} = N \frac{\sum P_i (x_i - x^r)}{1-x}$$

Άρα να βρω εκείνο το N

$$\frac{\sum P_i (x_i - x^r)}{rp x^{r+1} - (1-rp) x^{r+1}} = \frac{1}{N \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)}$$

$$P(x) = \frac{1}{N \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)}$$

και το N το βρίσκω με το $P(1) = 1$ } $N = \frac{1}{1 - \frac{1}{x_0}}$

$$P(x) = \frac{1 - \frac{1}{x_0}}{1 - \frac{x}{x_0}} = \left(1 - \frac{1}{x_0}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$$

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{x_0}\right) \frac{1}{x_0^n}$$

Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης $\{f(t), t \geq 0\}$
 που μακροβιανή διαδικασία $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$

$\{f_n, n=0,1,\dots\}$ με $f_n = f(t_n)$ να είναι μακροβιανή αλυσίδα

$\{f_n, n=0,1,\dots\}$ υπεισέρχεται στο $\{f(t), t \geq 0\}$ μακροβιανή αλυσίδα

ΘΕΩΡΗΜΑ Burke

Έστω $f(t)$ μια εστραβική διαδικασία της οποίας τα
 δευδιατικά ίσρη (simple path) είναι βηματικές συναρτήσεις
 με μοναδιαίες μεταβολές. Ας ονομάσουμε $\{\bar{t}_n, n=1,2,\dots\}$
 ως χρονικές στιγμές αύξησης και $\{\underline{t}_n, n=1,2,\dots\}$ ως
 στιγμές ελάττωσης και έστω $\bar{\pi}_x = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\bar{t}_n - 0 = x)$ και
 $\underline{\pi}_x = \lim_{n \rightarrow \infty} P(f(\underline{t}_n + 0) = 0)$ τότε αν υπάρχει το ένα
 από τα $\bar{\pi}_x$ και $\underline{\pi}_x$ υπάρχει το άλλο και είναι ίσα

Αρχή PASTA (Poisson Arrivals See Time Average)

Έστω $f(t)$ εστραβική διαδικασία που περιγράφει τις
 καταστάσεις ενός συστήματος εξυπηρέτησης και έστω $A(t)$
 ο αριθμός των πελατών που φεύγουν στο διάστημα $[0, t]$

- Αν i) Η $\{A(t), t \geq 0\}$ είναι μια διαδικασία Poisson
 ii) Για όλα τα $t \geq 0$ $\{A(t+u) - A(t), u \geq 0\}$ είναι
 ανεξάρτητο το $\{f(t), 0 \leq u \leq t\}$ (δηλαδή οι μελλοντικές
 αλλαγές δεν επηρεάζονται από τον αριθμό πελατών που
 υπάρχει στο σύστημα) τότε για κάθε $t \geq 0$ και $u > 0$
 $P(f(t+0) \in B) = \cancel{P(f(t) \in B)} P(f(t+0) \in B / A(t+1) - A(t+u) \geq 1)$
 για όλα τα B για τα οποία η οποία πιθανότητα
 υπάρχει